Cellulose

Courbure en fonction du poids ?

Céramiques

Contrainte de rupture ?

Déformations du matériau sous pression interne du pneu?

Composites

Polymères

Taux de déformation des chaussures ?

Quelles forces ?

Rigidité des cartilages ?

Résistance à la compression ?

Biomatériaux

Métaux

Matériaux de construction

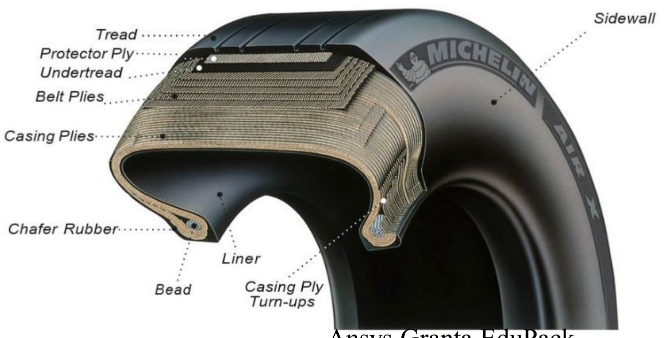
EPFL P.-Etienne Bourban

EPFL MSE100 2024

Solaronix

Kerecis® Omega3 Wound

SwissLens



Ansys Granta EduPack

https://www.chanel.com/ch

https://www.mammut.com

Résistance des matériaux 2025

pierre-etienne.bourban@epfl.ch

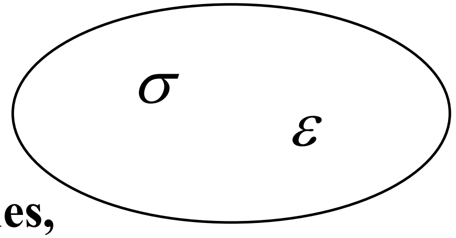
Introduction

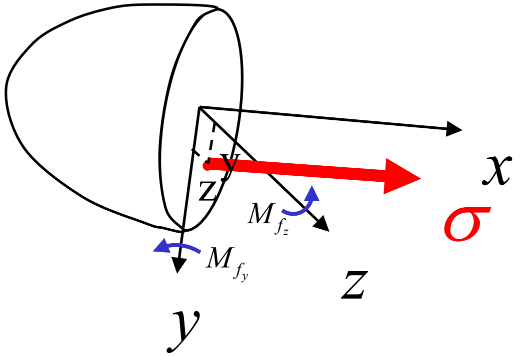
Définitions, hypothèses

Torseurs des efforts intérieurs

Principe d'équivalence

Moments d'une aire, moments statiques,
moments d'inertie





Traction et Compression

Bernoulli, St-Venant

Variation de températures

Pression interne

Force centrifuge

Influence du poids propre

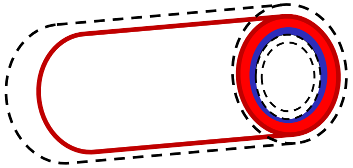
Etat de contraintes

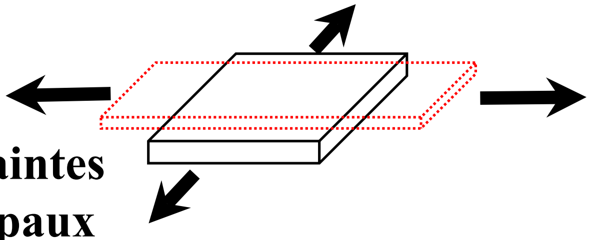
Cercle de Mohr

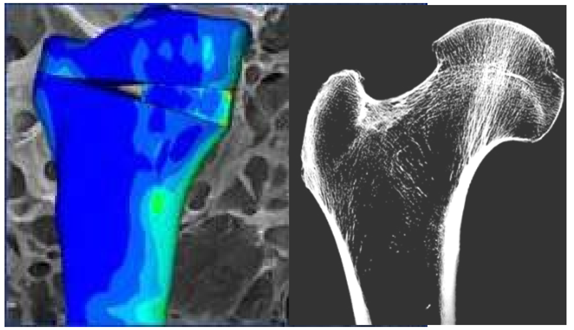
Energie de déformation

Etat bidimensionnel des contraintes

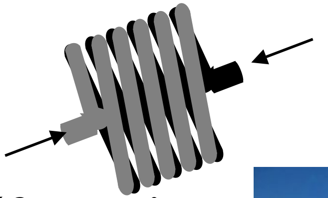
Axes et cercles de Mohr principaux







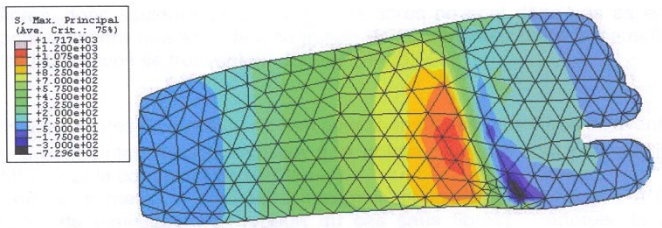
Résistance des matériaux



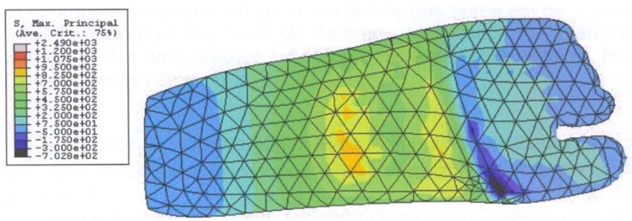
Cisaillement
Etat de contraintes, énergie de déformation
Torsion circulaire
Etat de contraintes, isostatiques, énergie de déformation
Flexion
Rappels de statique, hyperstatique
Flexion simple, états de contraintes, déformations
Méthode des équations différentielles, déformées
Flexion combinée
Energies de déformation élastique
Critères de performance
Concentrations de contraintes
Les limites de l'élasticité

Etudes de cas :
Rails, sertissage à chaud, corde d'escalade, réservoirs sous pression, goupilles, chaine, vis arbres creux, ressorts hélicoïdaux, poutres, ponts, flambage, etc….

https://www.marcoodermatt.ch/en/media-en



σ_{max}=1.2 MPa



σ_{max}=0.85 MPa

Agenda

2025
MSE 205 Résistance des Matériaux
pierre-etienne.bourban@epfl.ch

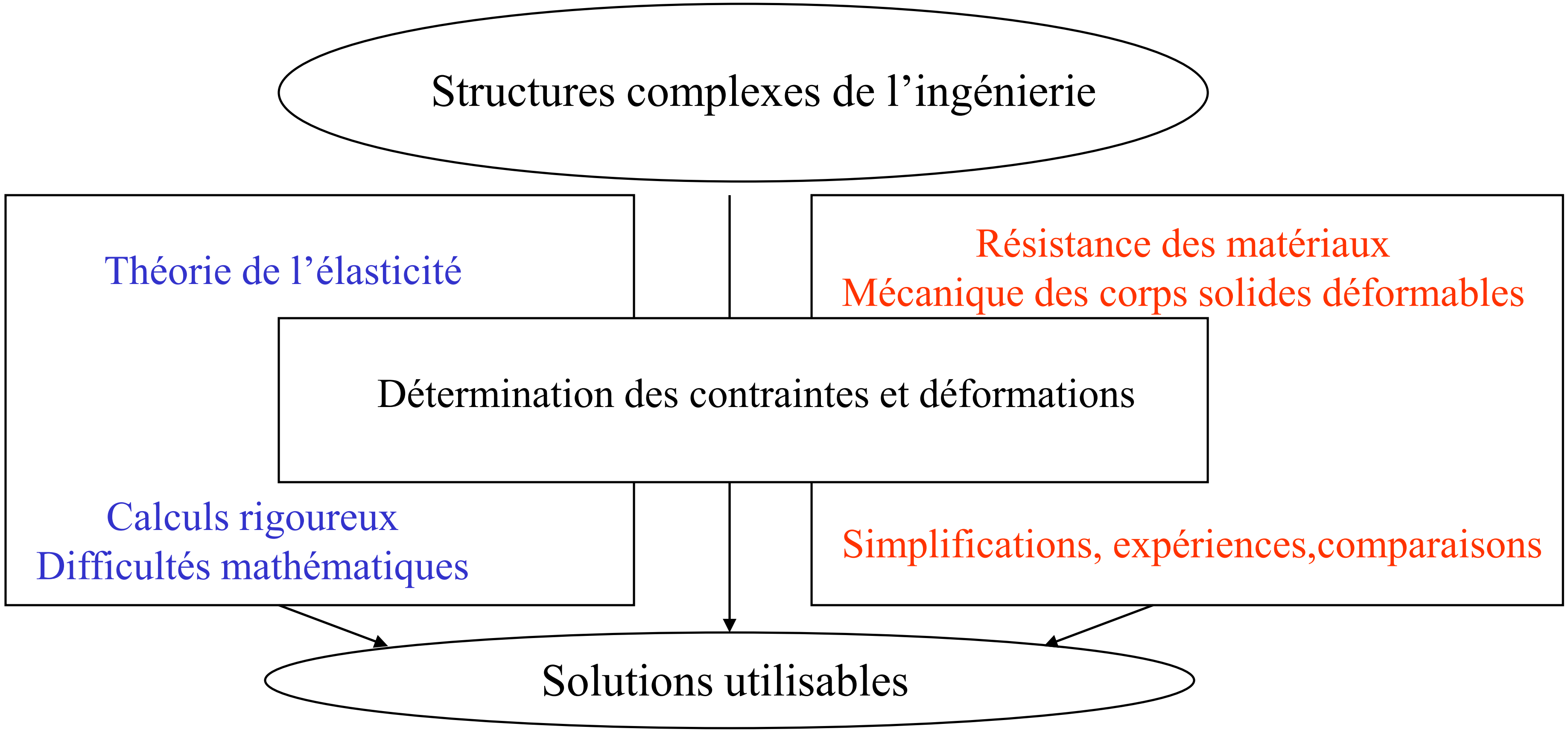
jours	mois		
17	février	Intro , moments d'inertie	exo1: Statique
24	février	Traction, Hyperstatique	exo2: Moments géométriques
3	mars	Sertissagge... Bidim	exo3: Cordes, réservoirs pressurisés
10	mars	Cisaillement et torsion	exo4: Goupilles, joints, agrafes
17	mars	Torsion et Ressorts	exo5: Arbres creux , Révision et questions
24	mars	Examen A (1/3)	
31	mars	Flexion, NTM	Correction Exa, exo6: courbures, potence
7	avril	Cisaillement, Déformée,Superposition, Hyperstatique	exo7: Moments max/min
14	avril	P. non prismatique, Energie, Castigliano	exo 8.1: Flêches
21	Pâques		
28	avril	Révision Flexion, exo 8.2	exo9 Superposition
5	mai	Concentration, Flambage,Rupture	exo10 : Flambages
12	mai	Questions ouvertes et prépa examen	
19	mai	Examen B (2/3)	
26	mai	Feedbacks	

Lundi 15h15 cours et exo
Documents sur Moodle
Examens écrits A et B

Bibliographie

- A. Bazergui et al, Résistance des matériaux, Presses Internationales Polytechnique, Montréal, 2003
- W.A. Nash , Résistance des matériaux, Schaum's, ed. McGraw-Hill, 2000
- M. Del Pedro, T. Gmur, Eléments de mécanique des structures, 2010, PPUR, EPFL Press
- M.F. Ashby, Materials Selection in Mechanical Design, 2010
- J.E. Gordon, Structures et matériaux, Pour la Science, 1994
- P. Agati, F. Lerouge, M. Rossetto, Résistance des matériaux, Dunod, 1999
- J. Goulet, J.-P. Boutin, Aide-mémoire, Résistance des matériaux, Dunod Paris, 2014
- + cf Bibliothèques

Introduction



!

Elasticité (Hooke) + plasticité

Concentrations de contraintes + fluage, +fatigue, +endommagement….

Objectifs

Matériaux

Température

Géométrie initiale

Effets extérieurs

(équilibre ou pas)

$\sigma \quad \varepsilon$

Conception
- structures
- joints

Géométrie résistante

σ_{crit} , ε_{crit}

Dimension critique

Valeurs et
leurs variations avec
position *x*,
temps t,
Température T…

Plasticité,
fluage,
fatigue…

Approches

- Théorie de l'élasticité

  1. Relations $\sigma(\varepsilon)$
  2. Conditions aux limites

  $\Rightarrow$ analyse de cas particuliers

- Résistance de matériaux

  1. Cas simples d'efforts intérieurs correspondant à des états de σ typiques (traction, flexion…)
  2. Etude de cas complexes en les combinant

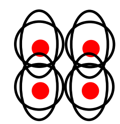
  S'appuie sur des essais expérimentaux

  $\Rightarrow$ Caractérisation mécanique des matériaux

  $\Rightarrow$ Essais sur pièces réelles pour vérification

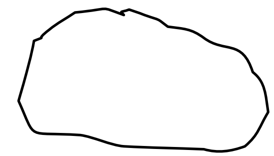
Hypothèses (I)

- *La continuité de la matière*



Atomes

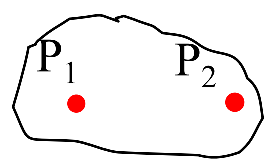
$\Rightarrow$



Macro

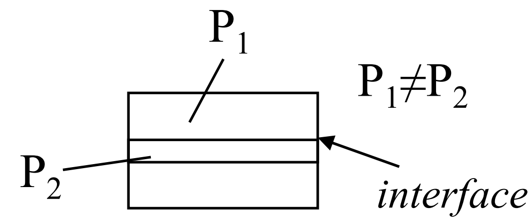
Matière solide et continue

- *L'homogénéité*



$P_1 = P_2$

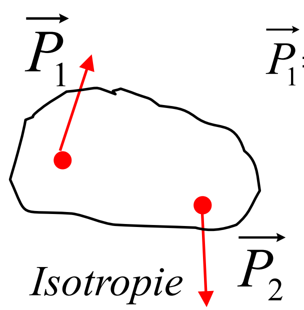
Homogène



$P_1 \neq P_2$

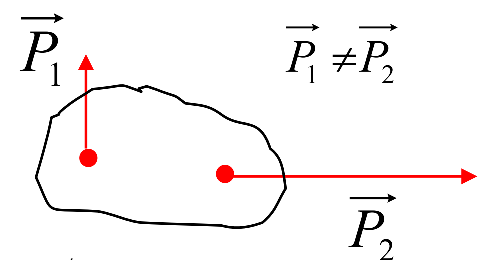
Hétérogène

- *L'isotropie*



$\vec{P}_1 = \vec{P}_2$

Isotropie



$\vec{P}_1 \neq \vec{P}_2$

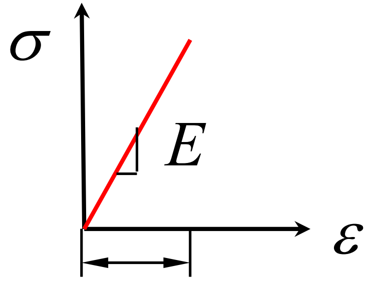
Anisotropie

Hypothèses (II)

- *Les déformations sont proportionnels aux contraintes*

Hooke (1678) $\qquad \sigma = E\varepsilon$

- *Les déformations sont petites par rapport aux dimensions de l'objet étudié*



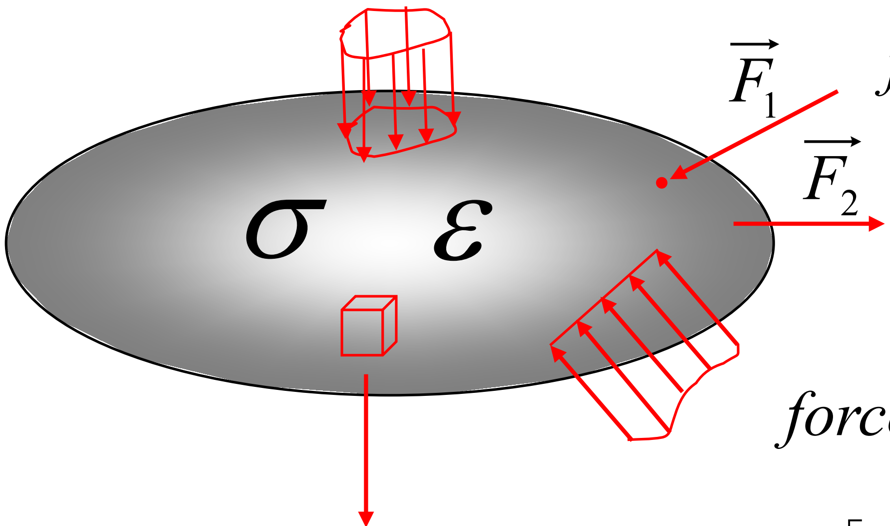
⇨ *Conditions d'équilibre de la statique* $\qquad \Sigma \vec{F} = 0$

$$\Sigma \overrightarrow{M} = 0$$

Définitions

forces surfaciques $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

forces externes locales $\vec{F}$ $[N]$

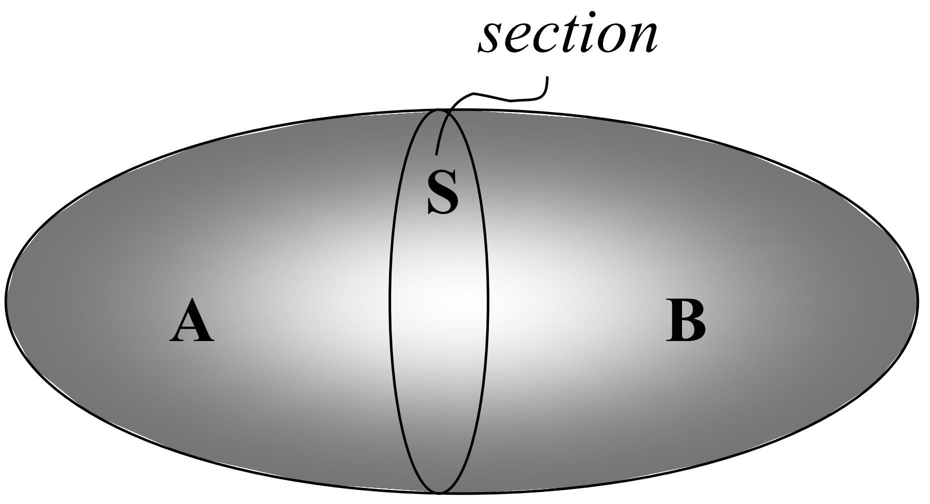


forces linéiques $\left[\frac{N}{m}\right]$

forces massiques (gravité) $\left[\frac{N}{m^3}\right]$

forces électromagnétiques…

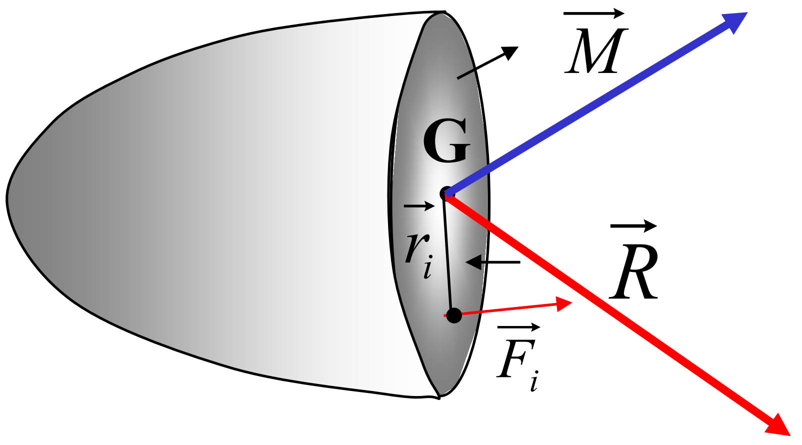
Efforts intérieurs



- Remplacer l'action de B par:

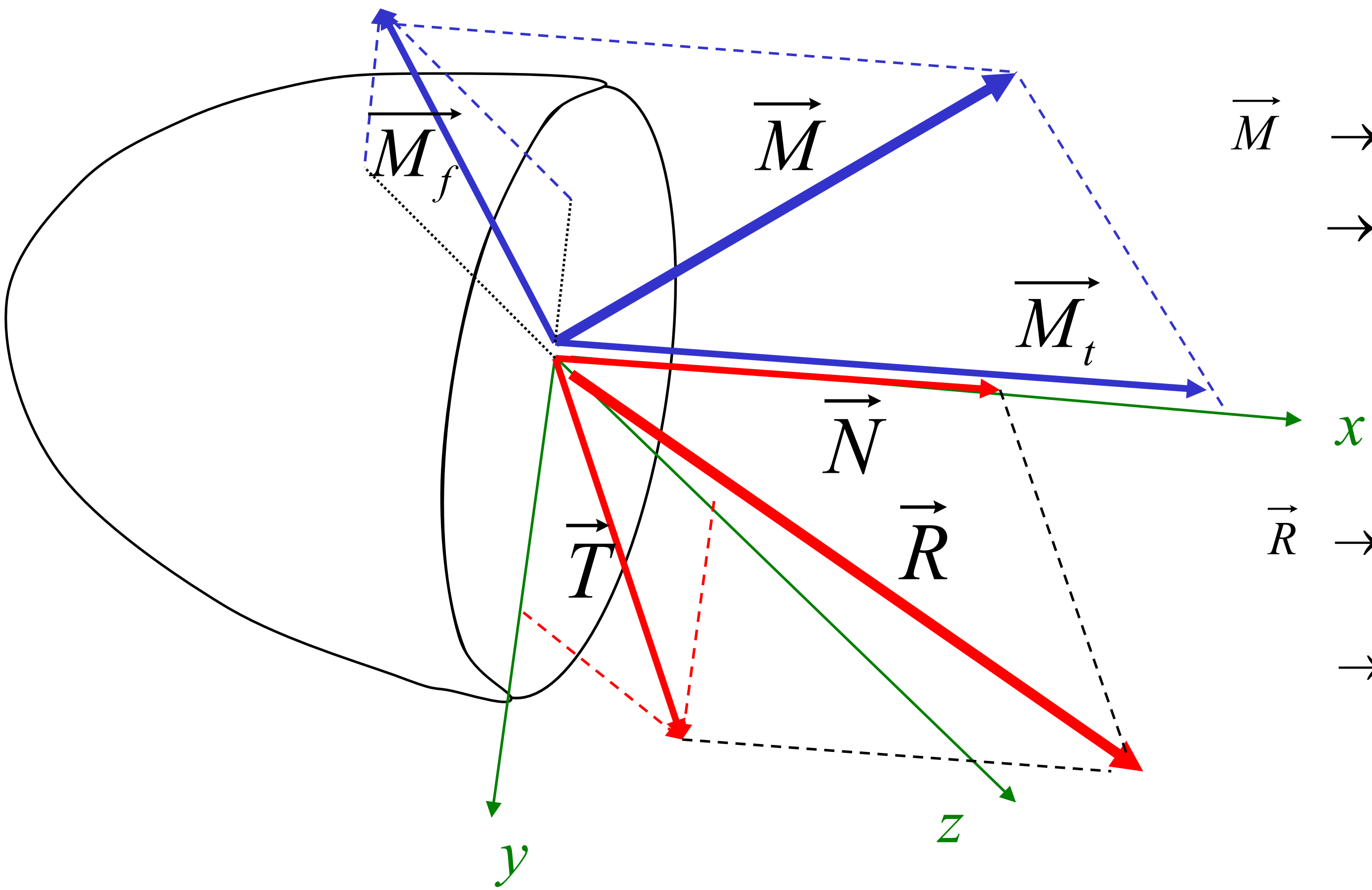
$\vec{R} = \textit{résultante des forces } \vec{F}$

$\vec{M} = \textit{moment résultant appliqué au centre de gravité de la section } S$



$$\left.\begin{aligned}\vec{R} &= \Sigma_B \vec{F}_i \\ \vec{M} &= \Sigma \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i\end{aligned}\right\} \textit{Torseur des efforts intérieurs}$$

Efforts intérieurs



$x, y, z > 0$

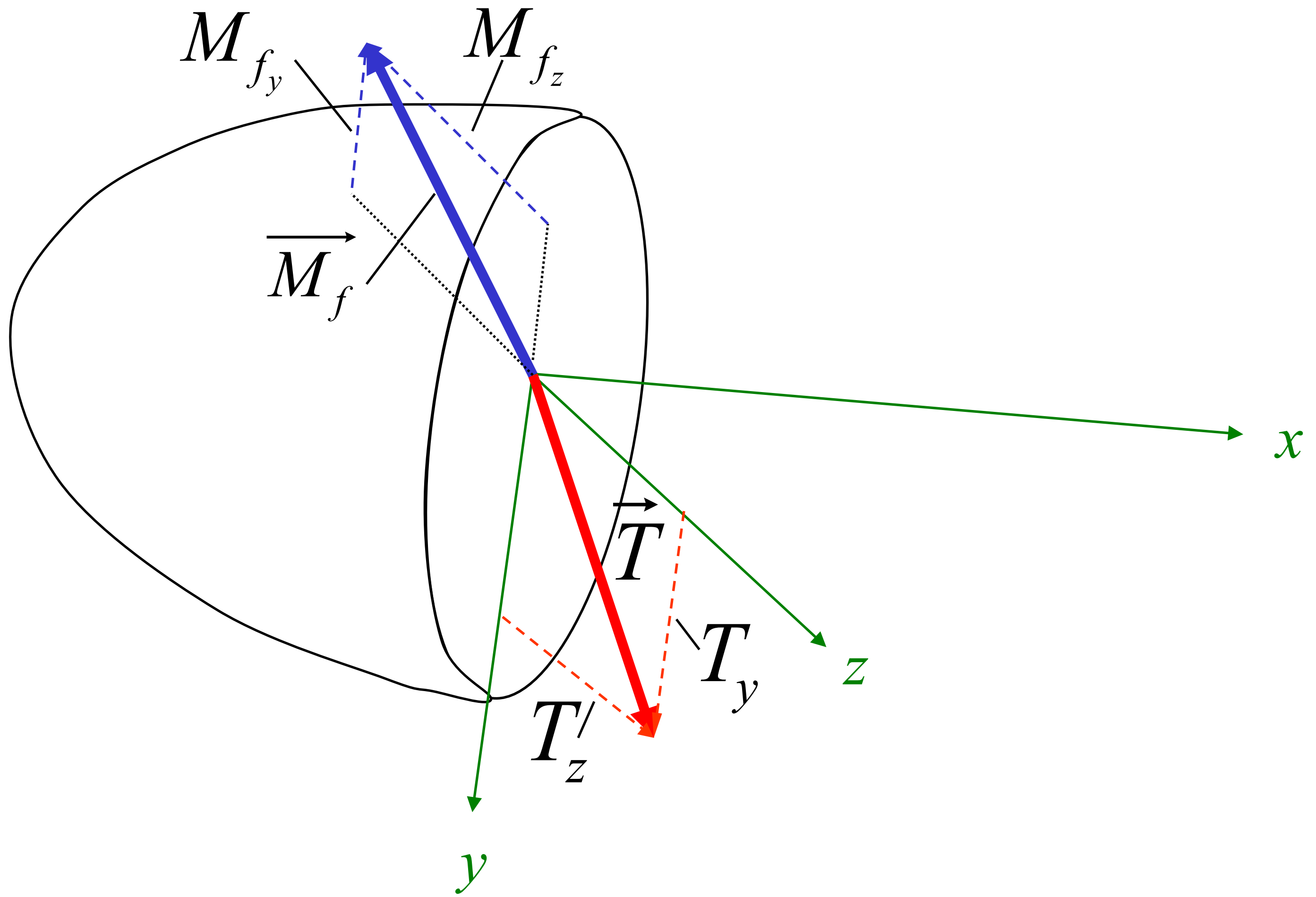
$\overrightarrow{M} \rightarrow \overrightarrow{M_t}\, torsion$

$\rightarrow \overrightarrow{M_f}\, flexion$

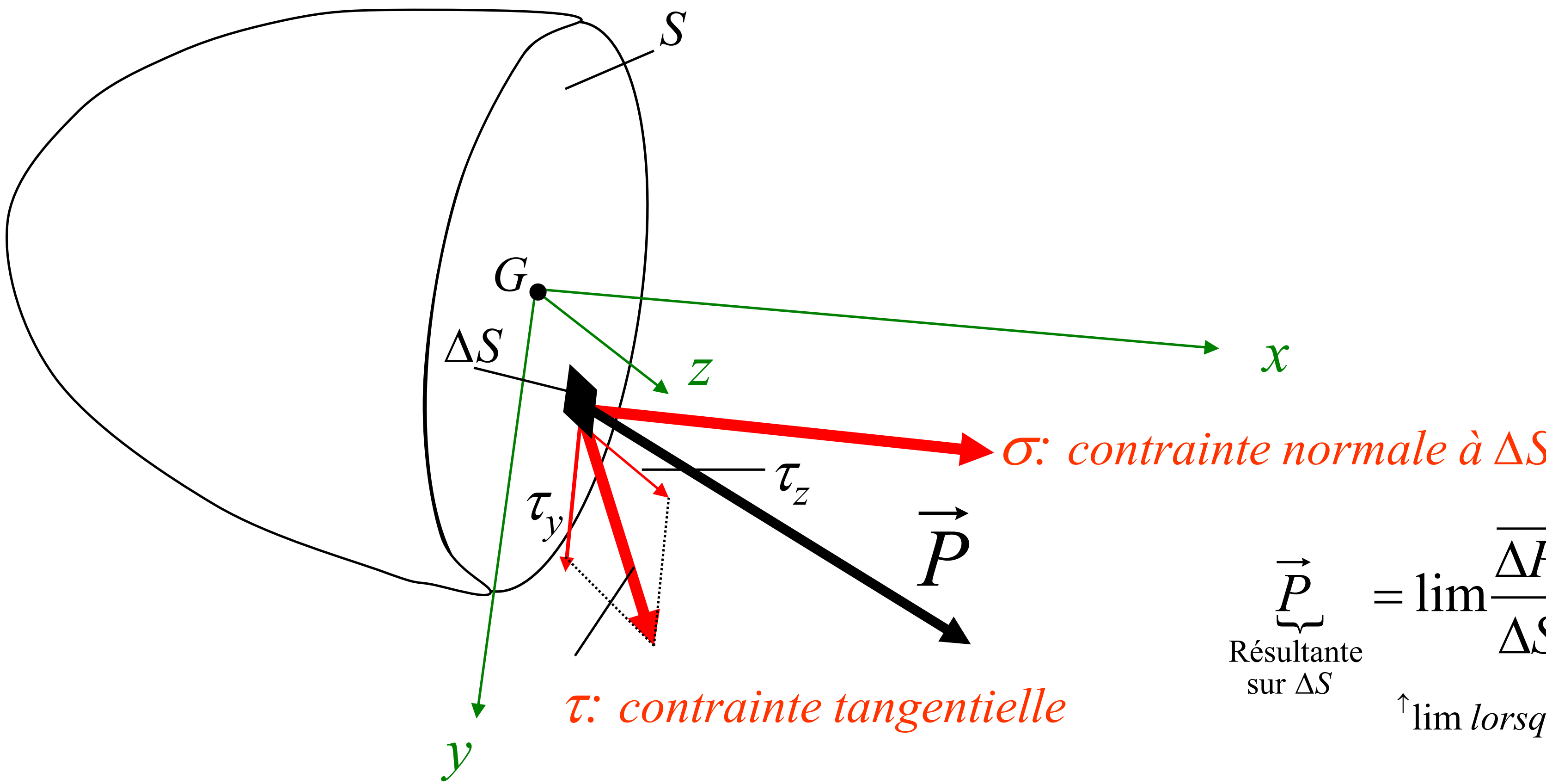
$\overrightarrow{R} \rightarrow \underbrace{\overrightarrow{N}}_{effort normal} : traction, compression$

$\rightarrow \underbrace{\overrightarrow{T}}_{effort tranchant dans Oyz} : cisaillement$

Efforts intérieurs



Contraintes



$$\underbrace{\vec{P}}_{\text{Résultante sur } \Delta S} = \lim \frac{\overrightarrow{\Delta P}}{\Delta S} = \frac{\overrightarrow{dP}}{dS}$$

$\uparrow$ lim *lorsque* $\Delta S \to 0$

$$Pa = \frac{N}{m^2}; \quad MPa = \frac{N}{mm^2}; \quad 1\,MPa = 10\,bar; \quad 1\,bar = 10^5\,Pa; \quad \left(\frac{Kg}{mm^2} = \frac{10N}{mm^2} = 10\,MPa = 100\,bar\right)$$

Principe d’équivalence

L’action des forces intérieures spécifiques, c’est-à-dire des contraintes agissant sur une section d’un solide en équilibre est équivalente à…

…l’action des forces extérieures appliquées sur l’une ou l’autre des parties du solide séparées par la section considérée

Torseur des efforts intérieurs

$$N = \iint_S \sigma \cdot dS$$

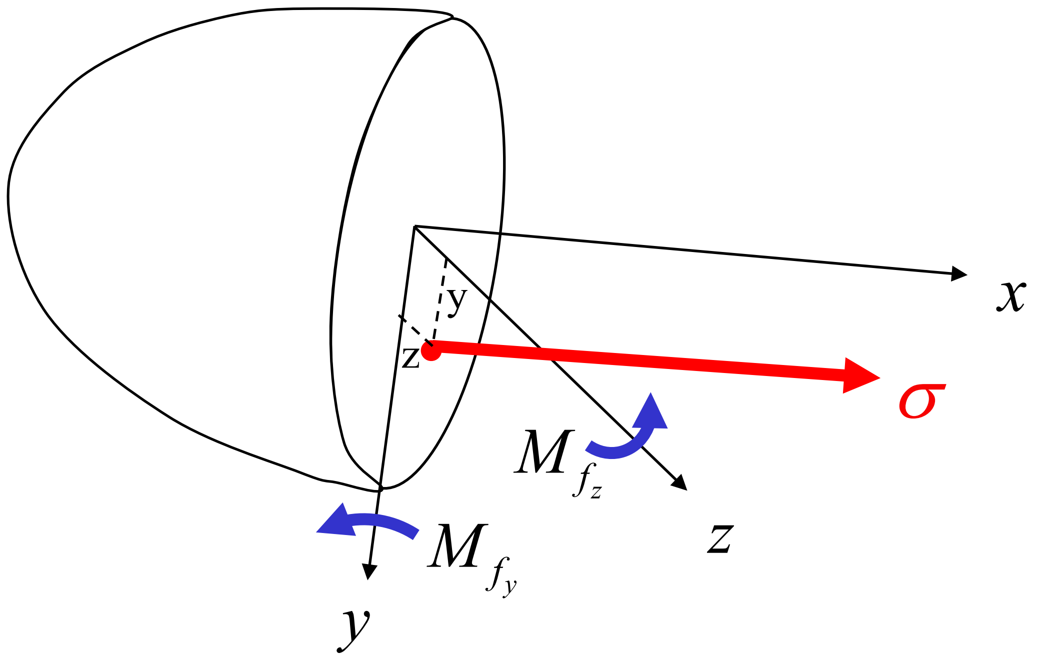
$$T_y = \iint_S \tau_y \cdot dS$$

$$T_z = \iint_S \tau_z \cdot dS$$

$$M_{f_y} = \iint_S \sigma \cdot z \cdot dS$$

$$M_{f_z} = -\iint_S \sigma \cdot y \cdot dS$$

$$M_t = \iint_S \left(\tau_z \cdot y - \tau_y \cdot z\right) dS$$



Cas particuliers d'efforts intérieurs

Le torseur se réduit à

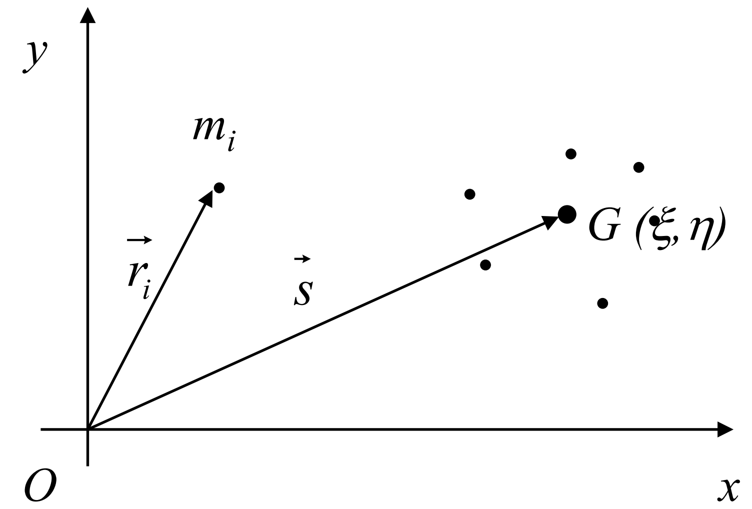
- <u>*Traction/compression*</u> $\rightarrow$ *si seulement si* $N \neq 0$ $\quad$ *N >0 traction sur A de B*
  N<0 compression
  σ constante sur S
- <u>*Cisaillement*</u> $\rightarrow$ *ssi* $\vec{T} \neq 0$, $\vec{\tau}$ *constante en grandeur et direction sur S*
- <u>*Torsion simple*</u> $\rightarrow$ *ssi* $\overrightarrow{M_t} \neq 0$, *composante tangentielle varie en intensité et direction*
- <u>*Flexion simple*</u> $\rightarrow$ *ssi* $\overrightarrow{M_f} \neq 0$ *et* $\vec{T}$ *sont perpendiculaires*
- <u>*Flexion pure*</u> $\rightarrow$ *ssi* $\overrightarrow{M_f} \neq f(x) = cste$, $\vec{T}=0$

Systèmes de masses coplanaires

- Moments statiques (1er ordre)

$$\overrightarrow{M_S} = \Sigma m_i \cdot \vec{r_i}$$

$$M_{S_x} = \Sigma m_i \cdot y_i \quad \text{par rapport à } Ox$$



- Moments d'inertie (2ème ordre)

$$I = \Sigma m_i \cdot r_i^2 \qquad r_i = \left|\vec{r_i}\right|$$

$$I_x = \Sigma m_i \cdot y_i^2$$

$$I_y = \Sigma m_i \cdot x_i^2$$

- Moment centrifuge ou produit d'inertie

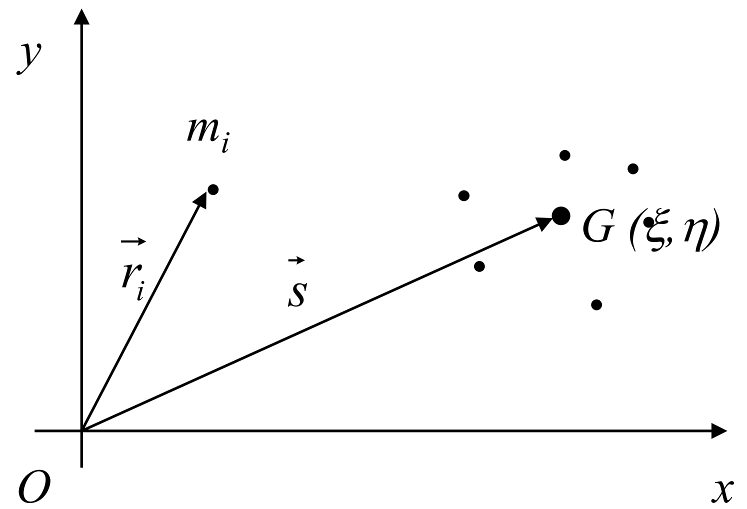
$$I_{xy} = \Sigma m_i \cdot x_i y_i$$

• Le <u>Centre d'inertie G(ξ,η)</u> est le point où la masse totale M donne le même $\overrightarrow{M_S}$ que celui des m_i

$$M \cdot \vec{s} = \overrightarrow{M_s} \quad \Rightarrow \quad \vec{s} = \frac{\Sigma m_i \cdot \vec{r_i}}{\Sigma m_i}$$

$$\xi = \frac{\Sigma m_i \cdot x_i}{M} = \frac{M_{s_y}}{M}$$

$$\eta = \frac{M_{s_x}}{M}$$



On peut montrer que $\overrightarrow{M_S}$ est nul par rapport à un axe passant par *G*

Moments d'une aire plane

(caractéristiques géométriques des sections)

$$S = \int_S dS$$

- Moments statiques

$$\vec{M_S} = \int_S \vec{r} \cdot dS$$

$$M_{S_x} = \int_S y \cdot dS$$

$$M_{S_y} = \int_S x \cdot dS$$

- Moments d'inertie

$$I = \int_S r^2 \cdot dS$$

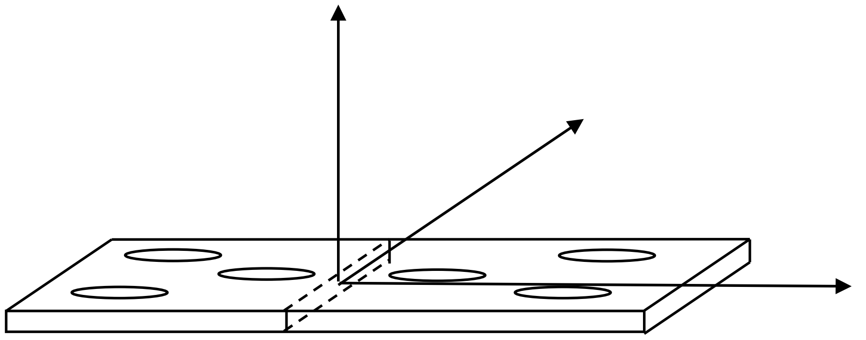
$$I_x = \int_S y^2 \cdot dS$$

$$I_y = \int_S x^2 \cdot dS$$

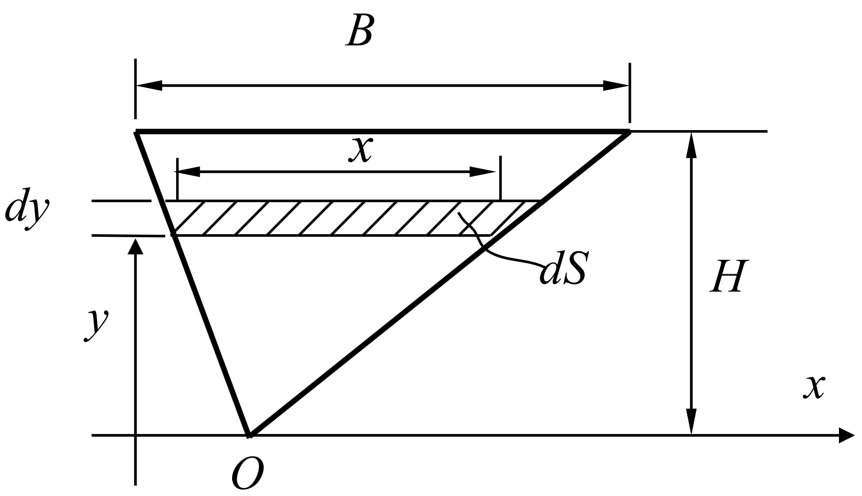
$$I = I_x + I_y = I_{polaire}$$

- Moment centrifuge

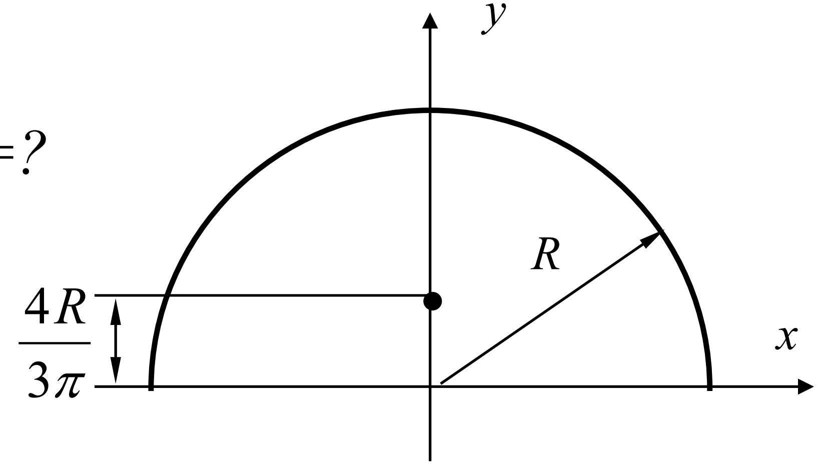
$$I_{xy} = \int_S x \cdot y \cdot dS$$



Exo: Centres d'inertie



$G(\xi,\eta) = ?$



$$M_{S_x} = \int_S y \cdot dS \qquad \text{où} \quad \frac{B}{x} = \frac{H}{y} \quad \text{et} \quad dS = x \cdot dy$$

$$= \int_0^H y \cdot \left(\frac{B \cdot y}{H} \cdot dy \right)$$

$$M_{S_x} = \frac{H^2 B}{3} \qquad \text{où} \quad S = \frac{BH}{2}$$

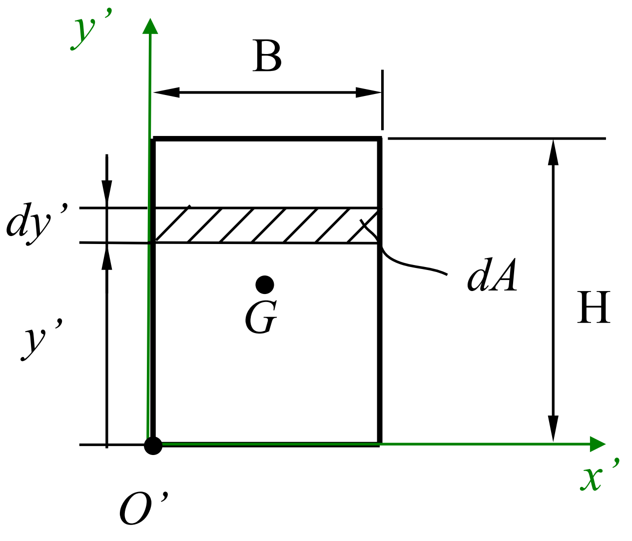
$$M_{S_x} = \eta \cdot S \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{M_{S_x}}{S} = \frac{2}{3} H}$$

$$\boxed{\eta = \frac{4R}{3\pi}}$$

Exo: Moment d'une aire plane

Moments d'inertie d'une section rectangulaire par rapport à O et G

Cas A: origine O' sur un des sommets



$$I_{x'} = \int_A y'^2 \cdot dA = \int_0^H y'^2 \cdot B \cdot dy' = \frac{BH^3}{3}$$

$$I_{y'} = \frac{HB^3}{3}$$

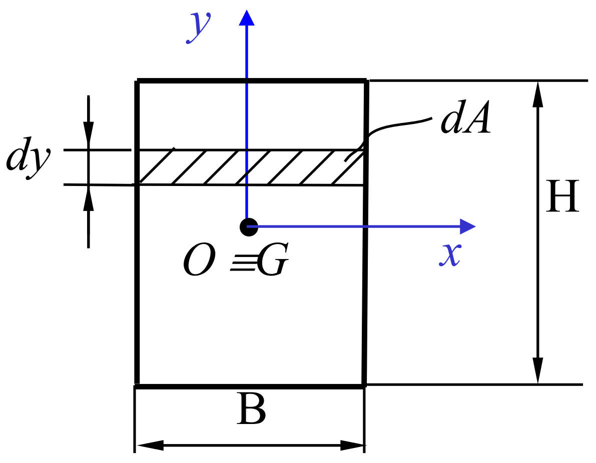
$$I = I_{x'} + I_{y'}$$

$$I_{x'y'} = \int_A x' \cdot y' \cdot dA = \int_0^H \int_0^B x' \cdot y' \cdot dx' dy' = \frac{B^2 H^2}{4}$$

Moment d'une aire plane: translation des axes

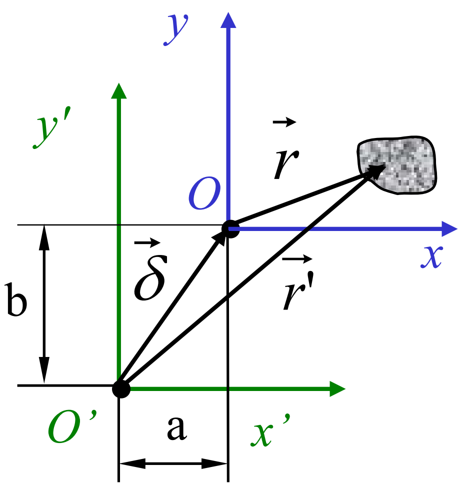
Moment d'inertie d'une section rectangulaire par rapport à O et G

Cas B: origine O≡G



$\Rightarrow$

Translation des axes



$$\vec{r}\,' = \vec{\delta} + \vec{r}$$

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

$$I_{x'} = \int_A y'^2 \cdot dA = \int (y+b)^2 dA = \int y^2 dA + 2b \int y dA + b^2 \int dA$$

$$I_{x'} = I_x + 2b \cdot M_{s_x} + b^2 A$$

Idem pour $I_{y'}$, même raisonnement pour I_{xy}

Si $O \equiv G$ *centre d'inertie* $\Rightarrow M_s = 0$

$$I_{x'} = I_x + b^2 A$$

$$I_{y'} = I_y + a^2 A$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + abA$$

$$a = \frac{B}{2} \quad et \quad b = \frac{H}{2}$$

$$\Rightarrow$$

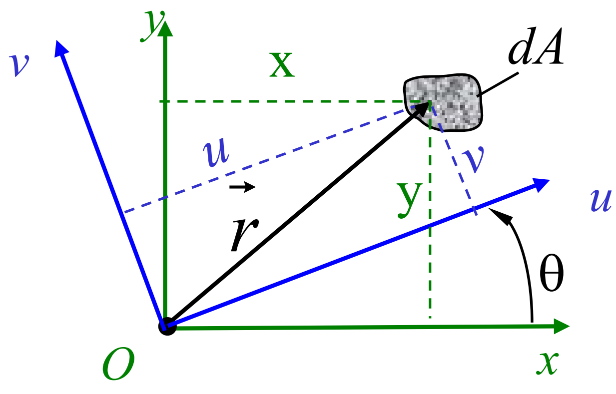
$$I_x = I_{x'} - b^2 A = \frac{B \cdot H^3}{3} - \left(\frac{H}{2}\right)^2 BH = \frac{BH^3}{12}$$

$$I_y = I_{y'} - a^2 A = \frac{B^3 H}{12}$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} - abA = \frac{B^2 H^2}{4} - \frac{B}{2}\frac{H}{2} BH = 0$$

Car les axes xy sont principaux d'inertie

Rotation des axes et moments principaux d'inertie



$$Rotation \equiv$$

$$u = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$v = y\cos\theta - x\sin\theta$$

$$I_u = \int_A v^2 dA$$

$$= \cos^2\theta \int y^2 dA + \sin^2\theta \int x^2 dA - 2\sin\theta\cos\theta \int xy dA$$

$$= \cos^2\theta I_x + \sin^2\theta I_y - 2\sin\theta\cos\theta I_{xy}$$

avec la trigonométrie

$$= \frac{1+\cos 2\theta}{2} I_x + \frac{1-\cos 2\theta}{2} I_y - \sin 2\theta I_{xy}$$

$$\boxed{I_u = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta}$$

idem pour I_v

$$\boxed{I_v = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) - \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta}$$

Rotation des axes et moments principaux d'inertie

I_u et I_v oscillent autour de la valeur moyenne $\dfrac{I_x + I_y}{2}$

en dérivant I_u et I_v par rapport à 2θ :

$$-\frac{dI_u}{d(2\theta)} = +\frac{dI_v}{d(2\theta)}$$

les extrema sont donnés par $\dfrac{d}{d(2\theta)} = 0 \Rightarrow tg\,2\theta = -\dfrac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = \dfrac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$

Cette relation est satisfaite pour 2 valeurs de θ entre 0 et π qui correspondent à un maximum I_1 et un minimum I_2 qui sont les moments principaux d'inertie.

Les axes correspondant avec θ satisfaisant la relation sont les axes principaux d'inertie pour lesquels le moment centrifuge I_{12} est nul par définition.

Moments d'inertie

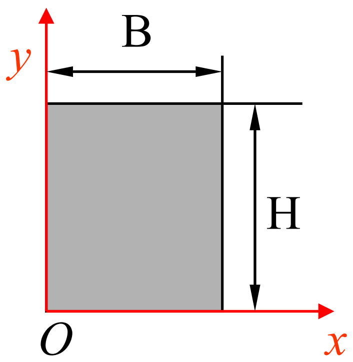
- Moments statiques M_{Sx} , M_{Sy}
- Moments d'inertie I_x , I_y , $I_p = I_x + I_y$
- Moment centrifuge ou produit d'inertie I_{xy}
- Centre d'inertie $G(\xi, \eta)$
- Axes principaux d'inertie $I_{x\,max} = I_1$, $I_{y\,max} = I_2$

$$\theta = 0$$

$$tg 2\theta = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

$$\theta = \pi$$

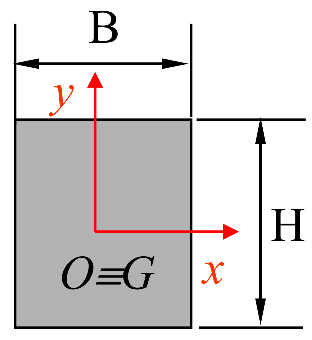
Moments d’inertie



$$I_x = \frac{BH^3}{3}$$

$$I_y = \frac{B^3H}{3}$$

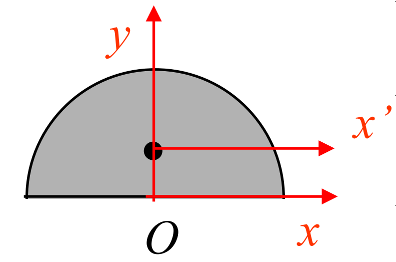
$$I_{xy} = \frac{B^2H^2}{4}$$



$$I_x = \frac{BH^3}{12}$$

$$I_y = \frac{B^3H}{12}$$

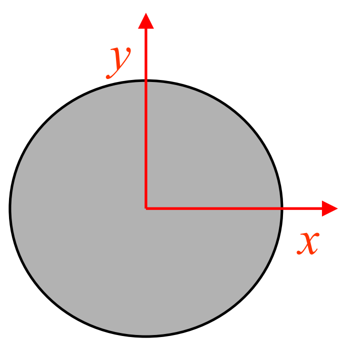
$$I_{xy} = 0$$



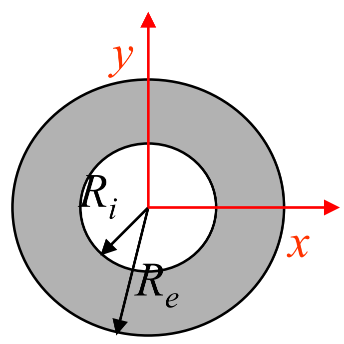
$$I_y = \frac{1}{8}\pi R^4$$

$$I_{xy} = 0$$

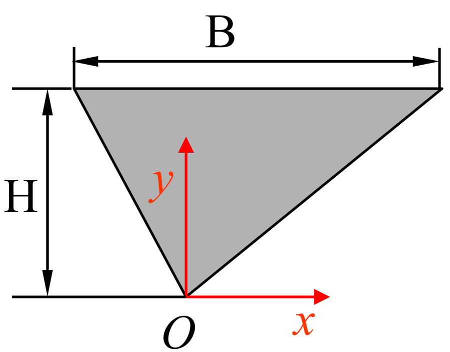
$$I_{x'} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)R^4$$



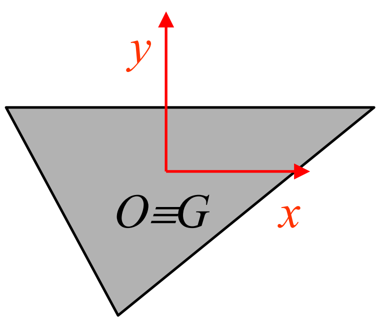
$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$$



$$I_x = \frac{\pi}{4}\left(R_e^{\,4} - R_i^{\,4}\right)$$

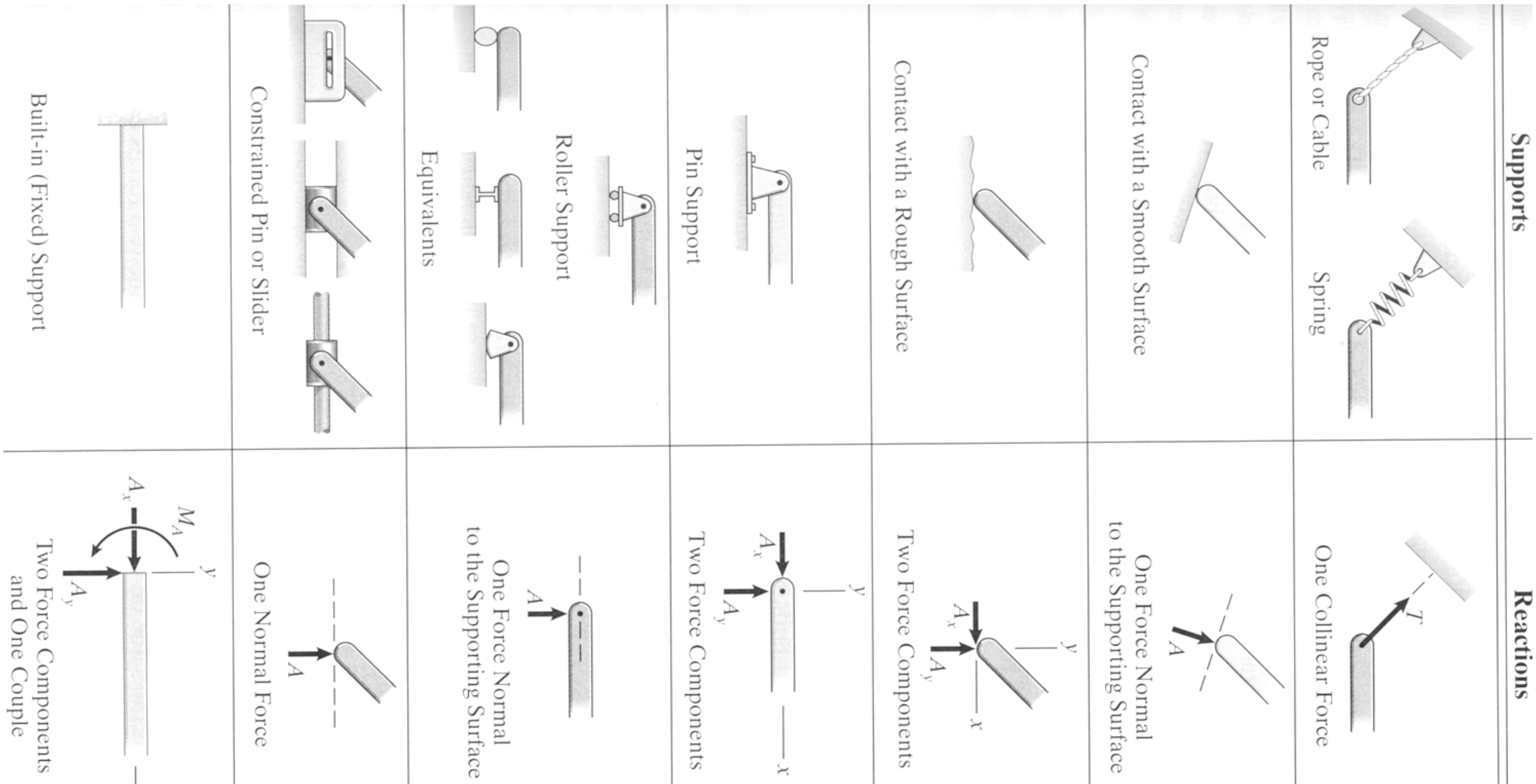


$$I_x = \frac{BH^3}{4}$$



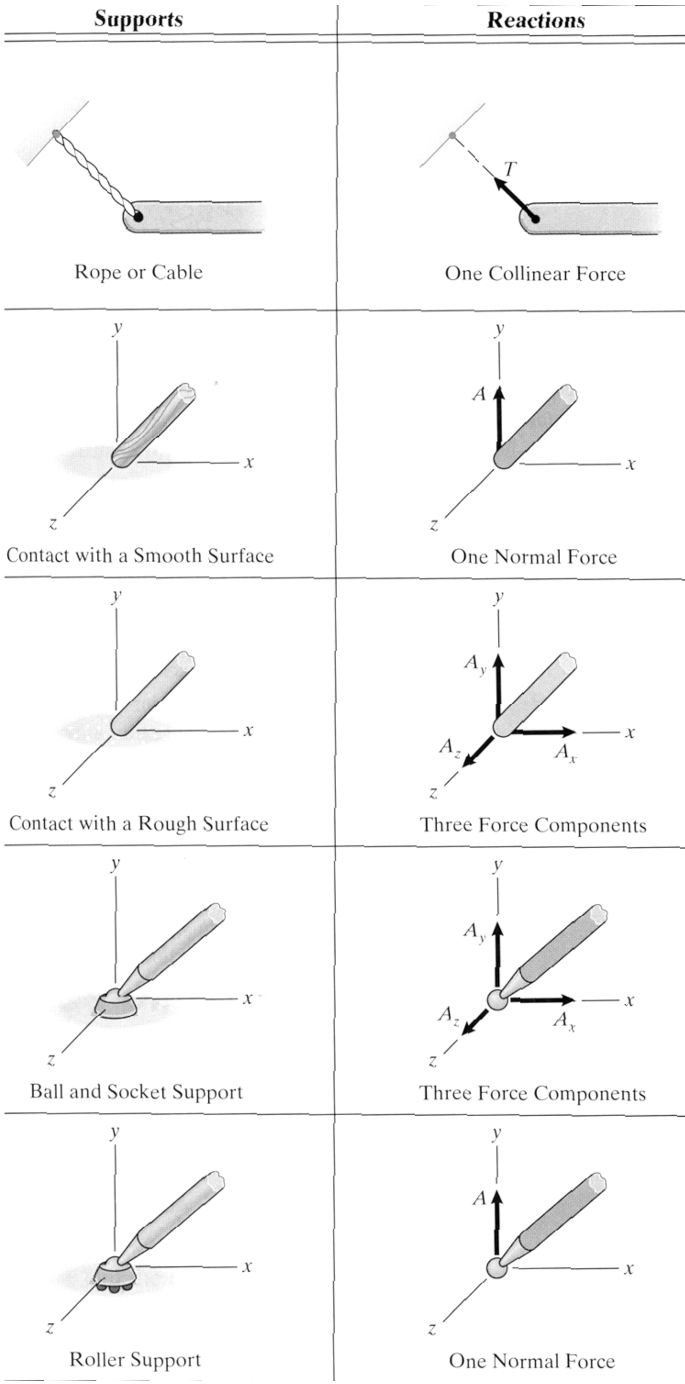
$$I_x = \frac{BH^3}{36}$$

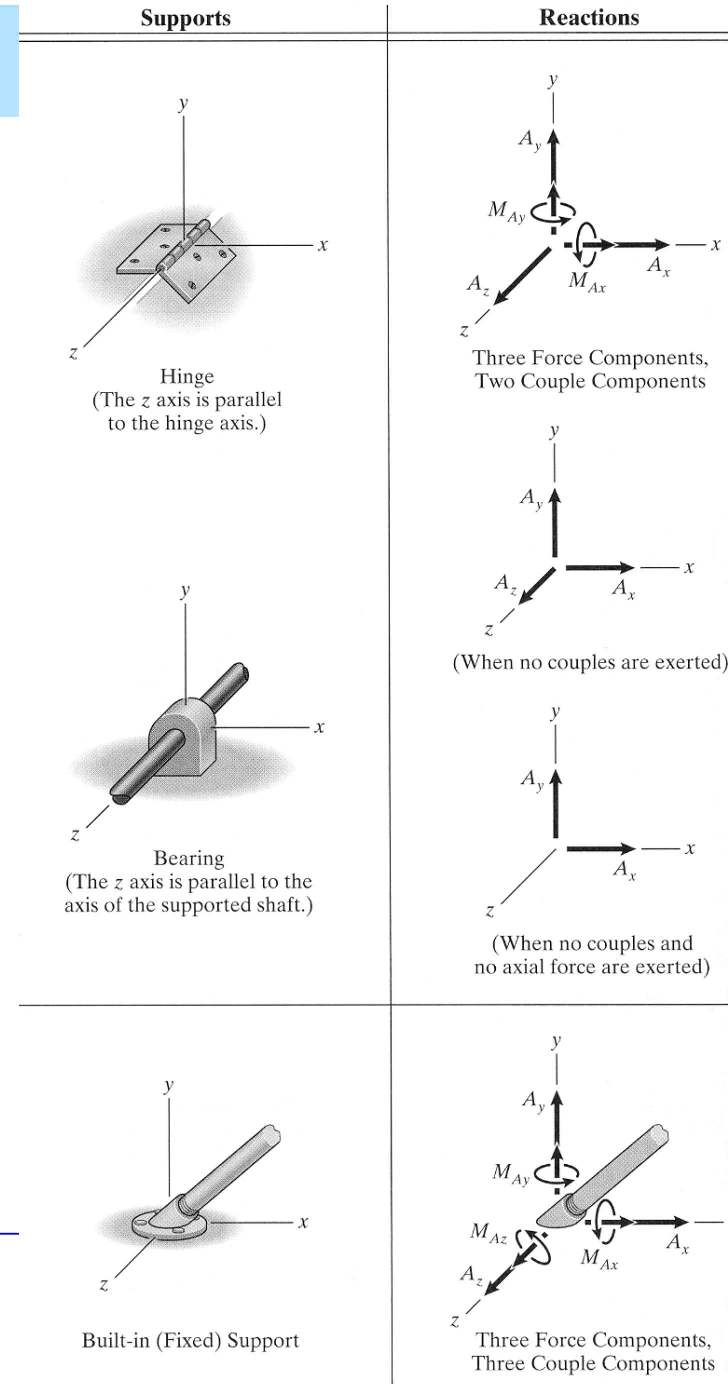
Appuis 2D



Bedford, 2003

Appuis 3D





Bedford, 2003